**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ**

**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Инженерная школа природных ресурсов

Направление подготовки Химическая технология

Отделение химической инженерии

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Лабораторная работа по дисциплине «Углубленный курс информатики»**

Выполнил студент гр. 2Д91 Е.С. Мухина

(Подпись)

\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020 г.

Отчет принят:

Преподаватель

доцент ОХИ ИШПР, к.т.н. В.А. Чузлов

(Подпись)

\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020 г.

Томск 2020 г.

**Цель работы:** научиться составлять программы для решения численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теоретическая часть**

ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ называется уравнение вида



связывающее одну независимую переменную *х,* искомую функцию *у(х)* и ее производные вплоть до п-го порядка. ПОРЯДКОМ обыкновенного дифференциального уравнения называется порядок старшей производной от искомой функции.

Дифференциальное уравнение называется ЛИНЕЙНЫМ, если оно имеет вид



|  |
| --- |
| Так, например, *у"* - *х2у* + *х2* = 0 — линейное дифференциальное уравнение второго порядка; *у"* + *еу -* 0 — нелинейное уравнение. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  В главе рассматриваются различные методы решения задачи Коши и краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробно рассмотрены метод Эйлера и ошибки, возникающие при его реализации на компьютерах; семейство одношаговых методов Рунге — Кутты, многошаговые методы. В качестве примеров методов решения краевой задачи излагаются методы стрельбы и разностный.  Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений  ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ называется уравнение вида    связывающее одну независимую переменную *х,* искомую функцию *у(х)* и ее производные вплоть до п-го порядка. ПОРЯДКОМ обыкновенного дифференциального уравнения называется порядок старшей производной от искомой функции.  Дифференциальное уравнение называется ЛИНЕЙНЫМ, если оно имеет вид    Так, например, *у"* - *х2у* + *х2* = 0 — линейное дифференциальное уравнение второго порядка; *у"* + *еу -* 0 — нелинейное уравнение.  ОБЩИМ ИНТЕГРАЛОМ уравнения (3.1) называют функцию    связывающую независимую переменную *х,* искомую функцию *у(х)* и *п* постоянных интегрирования *cv* .... с„ с помощью уравнения Ф(х, *у, с*......*сп)* = 0. Таким образом, функция *у(х)* входит в  функцию (3.2) неявным образом, причем число постоянных интегрирования равно порядку уравнения.  ОБЩИМ РЕШЕНИЕМ обыкновенного дифференциального уравнения называется функция    связывающая независимую переменную и *п* постоянных интегрирования, иначе говоря, уравнение (3.3) определяет функцию *у(х)* явным образом.  Для определения постоянных интегрирования задаются ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ. Их число равно числу постоянных интегрирования. Если в дополнительные условия подставить функцию (3.2) и решить полученную систему относительно постоянных интегрирования ct, ..., с„, а затем полученные решения подставить в (3.2), то получим ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ Ф^х, t/(x)) - 0. |

КУТТА МАРТИН ВИЛЬГЕЛЬМ (Kutta Martin Wilhelm; 1867—1944) — немецкий физик и математик. В математике К. развил метод Рунге (метод Рунге — Кутты) численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются две группы численных методов решения задачи Коши.

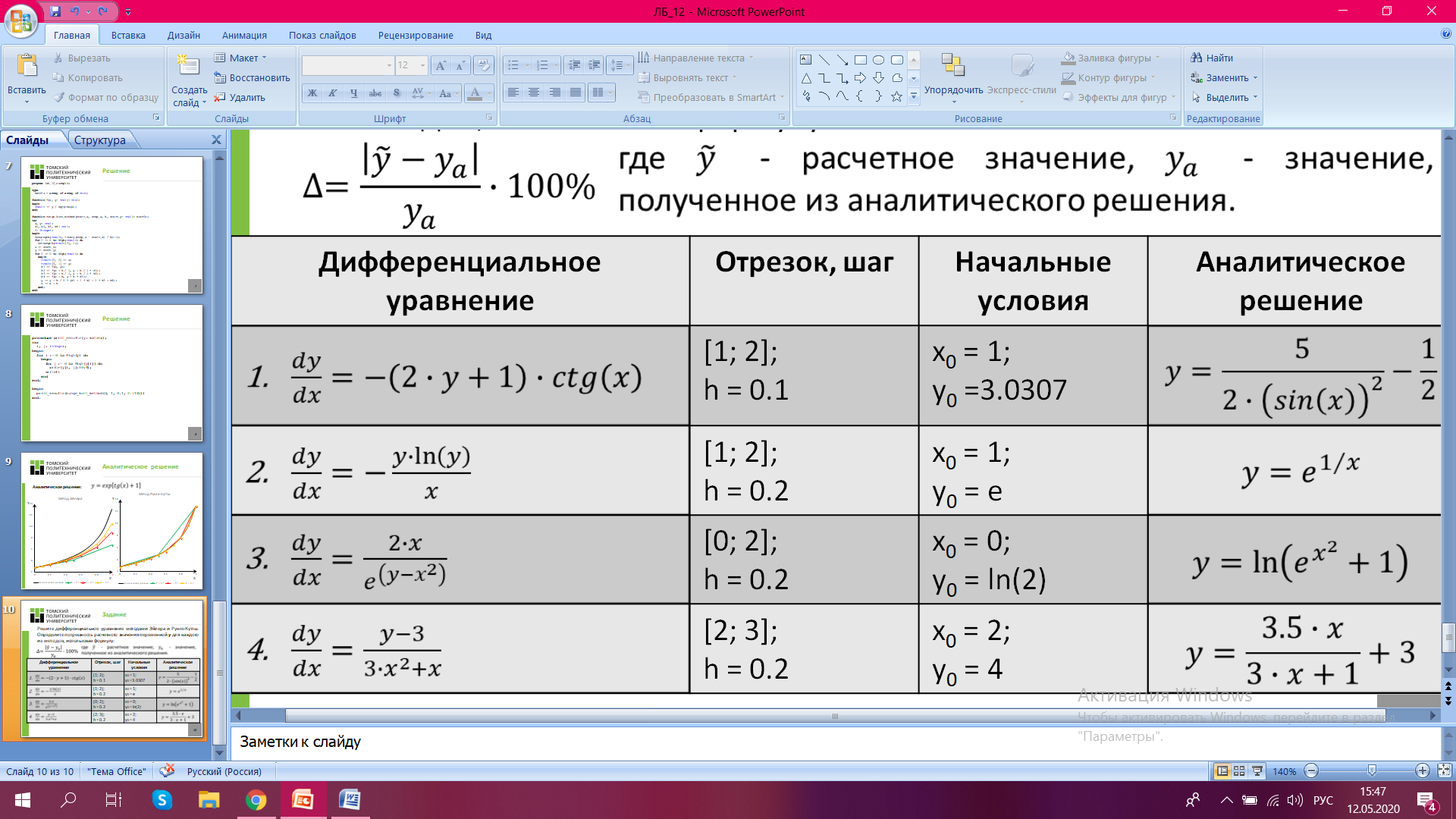
• ОДНОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ, в которых для нахождения решения в некоторой точке отрезка используется информация лишь в одной предыдущей точке. К этим методам относятся методы Эйлера и Рунге — Кутты.

• МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ, в которых для отыскания решения в некоторой точке используется информация о решении в нескольких предыдущих точках. К таким методам относится метод Адамса.

**Практическая часть**

**Задание**

**Задание:** Решите дифференциальное уравнение методами Эйлера и Рунге-Кутты. Определите погрешность расчетного значения переменной ***y*** для каждого из методов, использовав формулу:

****

**Программная реализация:**

**1)**

**1 способ:**

**Program** lb12;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := -(2 \* y + 1) \* 1 / tan(x)

**end**;

**function** fa(x: real): real;

**begin**

result := 5 / (2 \* sqr(sin(x))) - 1 / 2

**end**;

**function** eyler\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get\_error(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - fa(y[i, 0])) / fa(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(get\_error(eyler\_method(1, 2, 0.1, 3.0307)))

**end**.

**Ответ:**

  1.0000    3.0307    0.0002

    1.1000    2.5773    2.6563

    1.2000    2.2640    4.7870

    1.3000    2.0491    6.5469

    1.4000    1.9076    8.0402

    1.5000    1.8245    9.3430

    1.6000    1.7916   10.5170

    1.7000    1.8050   11.6172

    1.8000    1.8649   12.6973

    1.9000    1.9752   13.8141

    2.0000    2.1443   15.0302

**2 способ:**

**Program** lb12;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := -(2 \* y + 1) \* 1 / tan(x)

**end**;

**function** fa(x: real): real;

**begin**

result := 5 / (2 \* sqr(sin(x))) - 1 / 2

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get\_error(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - fa(y[i, 0])) / fa(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(get\_error(runge\_kutt\_method(1, 2, 0.1, 3.0307)))

**end**.

**Ответ:**

1.0000 3.0307 0.0002

1.1000 2.6476 0.0003

1.2000 2.3779 0.0003

1.3000 2.1927 0.0003

1.4000 2.0744 0.0003

1.5000 2.0126 0.0003

1.6000 2.0021 0.0003

1.7000 2.0422 0.0003

1.8000 2.1361 0.0003

1.9000 2.2918 0.0003

2.0000 2.5236 0.0003

**2)**

**1 способ:**

**Program** lb12;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := - y \* ln(y) / x

**end**;

**function**fa(x: real): real;

**begin**

result := exp(1 / x)

**end**;

**function** eyler\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get\_error(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - fa(y[i, 0])) / fa(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(get\_error(eyler\_method(1, 2, 0.2, exp(1))))

**end**.

**Ответ:**

   1.0000    2.7183    0.0000

    1.2000    2.1746    5.4912

    1.4000    1.8931    7.3267

    1.6000    1.7205    7.9098

    1.8000    1.6038    7.9825

    2.0000    1.5196    7.8312

**2 способ:**

**Program** lb12;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := - y \* ln(y) / x

**end**;

**function** fa(x: real): real;

**begin**

result := exp(1 / x)

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get\_error(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - fa(y[i, 0])) / fa(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(get\_error(runge\_kutt\_method(1, 2, 0.2, exp(1))))

**end**.

**Ответ:**

1.0000 2.7183 0.0000

1.2000 2.3010 0.0003

1.4000 2.0427 0.0004

1.6000 1.8683 0.0004

1.8000 1.7429 0.0003

2.0000 1.6487 0.0003

**3)**

**1 способ:**

**Program** lb12;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := 2 \* x / exp(y - sqr(x))

**end**;

**function**fa(x: real): real;

**begin**

result := ln(exp(sqr(x)) + 1)

**end**;

**function** eyler\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get\_error(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - fa(y[i, 0])) / fa(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(get\_error(eyler\_method(0, 2, 0.2, ln(2))))

**end**.

**Ответ:**

0.0000    0.6931    0.0000

    0.2000    0.6931    2.8317

    0.4000    0.7348    5.3538

    0.6000    0.8248    7.2451

    0.8000    0.9756    8.2639

    1.0000    1.2044    8.2910

    1.2000    1.5304    7.3937

    1.4000    1.9689    5.8728

    1.6000    2.5240    4.1947

    1.8000    3.1874    2.7749

    2.0000    3.9463    1.7882

**2 способ:**

**Program** lb12;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := 2 \* x / exp(y - sqr(x))

**end**;

**function** fa(x: real): real;

**begin**

result := ln(exp(sqr(x)) + 1)

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get\_error(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - fa(y[i, 0])) / fa(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(get\_error(runge\_kutt\_method(0, 2, 0.2, ln(2))))

**end**.

**Ответ:**

0.0000 0.6931 0.0000

0.2000 0.7133 0.0001

0.4000 0.7763 0.0006

0.6000 0.8893 0.0015

0.8000 1.0635 0.0031

1.0000 1.3133 0.0055

1.2000 1.6528 0.0089

1.4000 2.0920 0.0128

1.6000 2.6349 0.0164

1.8000 3.2790 0.0190

2.0000 4.0190 0.0204

**4)**

**1 способ:**

**Program** lb12;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := (y - 3) / (3 \* sqr(x) + x)

**end**;

**function** fa(x: real): real;

**begin**

result := (3.5 \* x) / (3 \* x + 1) + 3

**end**;

**function** eyler\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get\_error(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - fa(y[i, 0])) / fa(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(get\_error(eyler\_method(2, 3, 0.2, 4)))

**end**.

**Ответ:**

2.0000 4.0000 0.0000

2.2000 4.0143 0.0281

2.4000 4.0264 0.0504

2.6000 4.0368 0.0684

2.8000 4.0459 0.0831

3.0000 4.0539 0.0953

**2 способ:**

**Program** lb12;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result :=(y - 3) / (3 \* sqr(x) + x)

**end**;

**function** fa(x: real): real;

**begin**

result := (3.5 \* x) / (3 \* x + 1) + 3

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h)+1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get\_error(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - fa(y[i, 0])) / fa(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print\_results(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print\_results(get\_error(runge\_kutt\_method(2, 3, 0.2, 4)))

**end**.

**Ответ:**

2.0000 4.0000 0.0000

2.2000 4.0132 0.0000

2.4000 4.0244 0.0000

2.6000 4.0341 0.0000

2.8000 4.0426 0.0000

3.0000 4.0500 0.0000

**Выводы**

В ходе работы могу смело утверждать, что я научилась составлять программы для решения численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.